D E   R O T A T I O N E   C O R P I

La rotazione di un corpo rigido nello spazio puo' essere trattata come un problema puramente matematico,ma anche come un problema pratico-matematico, stante la possibilita' di simularla tramite il computer.

In questo caso si dovranno porre alcune convenzioni e limitazioni,visto che il CRT costringe ad una rappresentazione bidimensionale e precisamente dei soli punti trovantesi sugli assi x e y (l'asse x si trova sulla lunghezza dello schermo,mentre l'asse y rappresenta la sua altezza) .

Si converra' di porre l'asse z (suo verso positivo) verso la profondita' dello schermo e di individuare un senso di rotazione rispetto a questi assi. Inoltre la rotazione di un corpo,quando e' costretta nei limiti del CRT,e' bene avvenga sul suo centro geometrico,in modo da conservare sempre la visibilita' dell'oggetto durante la rotazione.

Si converra' percio' che la rotazione avvenga in senso orario guardando il verso positivo dell'asse sul quale avviene la rotazione stessa.

Si converra' una priorita' di rotazione sugli assi cartesiani (quando essi ne siano interessati) nel senso che una rotazione complessiva,scomposta nei suoi valori angolari di rotazione sugli assi x,y,z, avviene ruotando il corpo dapprima sull'asse x,poi sull'asse y,infine sull'asse z.

Lo studio della rotazione di un corpo nello spazio puo avvenire in molti modi, ma se si vuole considerarne l'applicabilita' a casi concreti,si puo' restringerne lo studio a solo 3 modi,ed essi sono :

1) Rotazione sugli assi cartesiani considerati immobili nello spazio e quindi sullo schermo.

2) Rotazione intorno ad un unico asse passante per l'origine ed avente qualsivoglia direzione.

3) Rotazione sugli assi cartesiani che ruotano all'unisono con il corpo stesso.

Per il calcolo della rotazione si dispone delle coordinate x,y,z dei vari vertici del corpo visto nella sua posizione '' di riposo '',ossia non ancora ruotato,nonche' degli angoli : alfa,beta,gamma, di rotazione sugli assi x,y,z (e cio' nei casi 1 e 3),oppure dell' angolo : teta' ,ossia il valore della rotazione intorno all'asse scelto,nonche' i 3 coseni direttori dell'asse medesimo, e cio' nel caso 2.

A calcolo terminato si otterranno le coordinate x',y',z' del punto ruotato, e si procedera' alla loro ultima trasformazione in coordinate Xv ed Yv (ossia Xvideo ed Yvideo) a seconda del punto di vista prospettico adottato.

A questo proposito,si converra' infine che l'osservatore si trovi sull'asse z (suo verso negativo) ad una distanza D ,dove : 0 < D < -oo .

CASO 1) : rotazione sugli assi cartesiani considerati fissi.

Siano : A=angolo di rotazione intorno all'asse x (abbrev. di ''alfa'')
B= '' '' '' '' '' '' y ('' '' beta)
Y= '' '' '' '' '' '' z ('' '' gamma)

x,y,z le coordinate del punto soggetto a rotazione
x',y',z' '' '' '' dopo la rotazione complessiva

Rotazione prioritaria : A,B,Y

x' = xcosBcosY + y(sinAsinBcosY-cosAsinY) + z(sinAsinY+cosAsinBcosY)

y' = xcosbsinY + y(cosAcosY+sinAsinBsinY) + z(cosAsinBsinY-sinAcosY)

z' = -xsinB + ysinAcosB + zcosAcosB

Qualora occorresse la priorita' : B,A,Y (utile in assonometria),ecco la relativa formulazione :

x' = x(cosBcosY-sinAsinBsinY) - ycosAsinY + z(sinBcosY+sinAcosBsinY)

y' = x(cosBsinY+sinAsinBcosY) + ycosAcosY + z(sinBsinY-sinAcosBcosY)

z' = -xcosAsinB + ysinA + zcosAcosB

CASO 2) : rotazione su di un asse unico,di qualsivoglia direzione e passante per l'origine,di un prefissato angolo TETA'.

Si devono fissare i 3 coseni direttori dell'asse intorno al quale avvera' la la rotazione del previsto angolo TETA',e per far cio' sono disponibili 2 diversi modi : tramite coordinate omogenee e tramite gli angoli polari.

Posizionamento in coordinate omogenee :

Dette a,b,c le coordinate omogenee del vettore rispetto agli assi x,y,z, e cosAd,cosBd,cosYd i coseni direttori del medesimo vettore di rotazione, si avra' che : **M=SQR(a^2+b^2+c^2) ; cosAd=a/M ; cosBd=b/M ; cosYd=c/M**

Posizionamento in coordinate polari :

Detto TETA l'angolo compreso tra il vettore di rotazione e l'asse z,nonche' Y l'angolo creato dalla sua proiezione sul piano xy, si avra' che :

cosAd=senTETAcosY ; cosBd=senTETAsenY ; cosYd=cosTETA

Cio' fatto si calcolano i 9 coseni direttori del sistema ruotato con :

cosA1= cos^{2}Ad(1-cosTETA') + cosTETA'
cosA2=cosAdcosBd(1-cosTETA') + senTETA'cosYd
cosA3=cosAdcosYd(1-cosTETA') - senTETA'cosBd
cosB1=cosAdcosBd(1-cosTETA') - senTETA'cosYd
cosB2= cos^{2}Bd(1-cosTETA') + cosTETA'
cosB3=cosBdcosYd(1-cosTETA') + senTETA'cosAd
cosY1=cosAdcosYd(1-cosTETA') + senTETA'cosBd
cosY2=cosBdcosYd(1-cosTETA') - senTETA'cosAd
cosY3= cos^{2}Yd(1-cosTETA') + cosTETA'

Infine per la rotazione destrorsa : || per quella sinistrorsa :

x'= xcosA1+ycosB1+zcosY1 ; x'= xcosA1+ycosA2+zcosA3

y'= xcosA2+ycosB2+zcosY2 ; y'= xcosB1+ycosB2+zcosB3

z'= xcosA3+ycosB3+zcosY3 ; z'= xcosY1+ycosY2+zcosY3

CASO 3) : rotazione sugli assi cartesiani che ruotano insieme al corpo

Siano :

A=angolo di rotazione intorno all'asse	x	(abbrev. di '' alfa '')	
B= '' '' '' '' '' ''	y	('' ''	beta)
Y= '' '' '' '' '' ''	z	('' ''	gamma)

x,y,z le coordinate del punto soggetto a rotazione
x',y',z' '' '' '' '' dopo la rotazione complessiva

Per rotazione prioritaria : A,B,Y

$$x' = x\cos B\cos Y - y\cos B\sin Y + z\sin B$$

$$y' = x(\cos A\sin Y+\sin A\sin B\cos Y) + y(\cos A\cos Y-\sin A\sin B\sin Y) - z\sin A\cos B$$

$$z' = x(\sin A\sin Y-\cos A\sin B\cos Y) + y(\sin A\cos Y+\cos A\sin B\sin Y) + z\cos A\cos B$$

Sia nei due casi precedenti che in quest'ultimo caso,le coordinate finali x',y',z' si riferiscono alla posizione del punto ruotato rispetto agli assi cartesiani primari che sono immobili nello spazio e che percio' definiscono la posizione del corpo '' a riposo '' ,e cioe' non ancora ruotato.

Gli assi cartesiani secondari accompagnano il corpo durante le rotazioni su di essi nel caso sopra trattato,mentre nel caso 1), assi cartesiani primari ed assi cartesiani secondari coincidono.

Analogamente nel caso 2),pur prescindendo da rotazioni sugli assi cartesiani, che rappresenterebbero un caso particolare di esso,si hanno x',y',z' come coordinate finali del punto soggetto a rotazione rispetto agli assi cartesiani primari,che stabiliscono anche le coordinate iniziali x,y,z.

RELAZIONI ESISTENTI TRA LA ROTAZIONE SU DI UN ASSE UNICO

E LA ROTAZIONE COMPLESSIVA EFFETTUATA SUGLI ASSI CARTESIANI

Le rotazioni di cui ai paragrafi (1) e (3) ,ossia la rotazione sugli assi cartesiani secondari coincidenti con quelli primari e quella sugli assi cartesiani secondari che seguono il corpo durante le rotazioni,possono essere considerate un caso particolare della rotazione attorno ad un unico asse,passante per l'origine ed avente qualsivoglia direzione,di cui al par. (2).

Di fatto anche le due formulazioni,di cui ai par. (1) e (3) possiedono 9 coseni direttori,come e' per la generale di cui par. (2).

Per la rotazione sugli assi cartesiani secondari considerati fissi :
(e con rotazione prioritaria A,B,Y)

(abbreviando la dizione : cosALFA1 in A1,semplicemente;ecc.ecc.)

$A_1=\cos B\cos Y$; $B_1=\sin A\sin B\cos Y-\cos A\sin Y$; $Y_1=\sin A\sin Y+\cos A\sin B\cos Y$

$A_2=\cos B\sin Y$; $B_2=\cos A\cos Y+\sin A\sin B\sin Y$; $Y_2=\cos A\sin B\sin Y-\sin A\cos Y$

$A_3= -\sin B$; $B_3=\sin A\cos B$; $Y_3=\cos A\cos B$

Da cui : $x'= xA_1 + yB_1 + zY_1$

$y'= xA_2 + yB_2 + zY_2$

$z'= xA_3 + yB_3 + zY_3$; e cio' in generale.

Analogamente i 9 coseni direttori del caso (3) ,ossia per la rotazione sugli assi cartesiani che ruotano assieme al corpo sono :

$A_1=\cos B\cos Y$; $B_1=-\cos B\sin Y$; $Y_1=\sin B$

$A_2=\cos A\sin Y+\sin A\sin B\cos Y$; $B_2=\cos A\cos Y-\sin A\sin B\sin Y$; $Y_2=-\sin A\cos B$

$A_3=\sin A\sin Y-\cos A\sin B\cos Y$; $B_3=\sin A\cos Y+\cos A\sin B\sin Y$; $Y_3=\cos A\cos B$

Si possono notare molte similitudini tra i 9 coseni direttori dei due sistemi : ad esempio gli A_1 e Y_3 sono uguali; A_2,A_3,e B_3 del sistema fisso (1) cambiati di segno,sono uguali ai B_1,Y_1,Y_2 del sistema mobile (3); B_1,Y_1,B_2,Y_2 del sistema fisso sono uguali agli A_2,A_3,B_2,B_3 del sistema mobile,invertendo solo i segni esistenti tra i due polinomi che costituiscono questi coseni direttori. Cio' semplifichera' la ricerca delle relazioni tra i due sistemi (1) e (3) ed il generale (2).

CASO DIRETTO : dati A,B,Y (con priorita' di rotazione appunto A,B,Y) come angoli di rotazione attorno agli assi cartesiani,e cio' sia per il caso di cui al par. (1) che per quello di cui al par. (3),calcolare la complessiva rotazione che avverrebbe su di un asse unico onde portare il corpo nella medesima posizione; ossia calcolare i 3 coseni direttori e l'angolo TETA' da inserire nella formula generale di cui al par. (2).

Si danno i 18 coseni direttori dei sistemi (1) e (3),e per brevita' di calcolo,si cercheranno le similitudini tra essi,ossia tra il sistema di rotazione con assi fissi (F) e quello con assi mobili (M).

A1(F) = cosBcosY = A1(M)

B1(F) = sinAsinBcosY +- cosAsinY = A2(M) ,dove - per F,e + per M

Y1(F) = sinAsinY +- cosAsinBcosY = A3(M) ,dove + per F,e - per M

A2(F) = cosBsinY = -B1(M)

B2(F) = cosAcosY +- sinAsinBsinY = B2(M) ,dove + per F,e - per M

Y2(F) = cosAsinBsinY +- sinAcosY = B3(M) ,dove - per F,e + per M

A3(F) = -sinB = -Y1(M)

B3(F) = sinAcosB = -Y2(M)

Y3(F) = cosAcosB = Y3(M)

Infine usando i 9 coseni direttori di un sistema a piacere,si avra' in generale che :

cosTETA' = (A1+B2+Y3-1)/2

cosAd = (B3-Y2)/2sinTETA'

cosBd = (Y1-A3)/2sinTETA'

cosYd = (A2-B1)/2sinTETA'

Dunque noti i 3 coseni direttori : cosAd,cosBd,cosYd,si puo' procedere,se fosse richiesto,alla determinazione della posizione del vettore di rotazione, e cio' sia esprimendola in coordinate polari che omogenee.

POSIZIONE DEL VETTORE DI ROTAZIONE IN COORDINATE POLARI

Detto TETA l'angolo compreso tra il vettore di rotazione e l'asse z,nonche' Yp l'angolo creato della sua proiezione sul piano xy,si avra' che :

cosTETA = cosYd ; tgYp = cosBd/cosAd

Restano da definire i quadranti di appartenenza degli angoli cosi' trovati, e cio' e' particolarmente importante per Yp,infatti nel passaggio dalle coordinate polari ai coseni direttori,si usa cosYp e sinYp,infatti :

cosAd = sinTETAcosYd ; cosBd = sinTETAsinYd ; cosYd = cosTETA

ed i corretti segni di cosYp e sinYp dipendono dal quadrante di appartenenza dell'angolo Yp.

Si risolve la cosa testando i segni di cosBd e cosAd,che vanno a generare appunto : tgYd = cosBd/cosAd ,infatti :

```
Per cosBd   e cosAd>0 ,range di Yp : 0-90
Per cosBd>0 e cosAd<0 ,  ''   ''  '' : 90-180
Per cosBd   e cosAd<0 ,  ''   ''  '' : 180-270
Per cosBd<0 e cosAd>0 ,  ''   ''  '' : 270-360
```

POSIZIONE DEL VETTORE DI ROTAZIONE IN COORDINATE OMOGENEE

Premessa :

Dati a,b,c (dove -1 <= a,b,c, <= 1) si ricavano i coseni direttori

formando il modulo : M=SQR(a^2+b^2+c^2) ,ed infine :

cosAd = a/M ; cosBd = b/M ; cosYd = c/M

Il caso inverso,cioe' dati i 3 coseni direttori,ricavare a,b,c di partenza, non e' risolvibile in modo univoco,poiche' quanto sopra e' una identita' dunque sono infiniti i valori che possono darsi ad a,b,c onde ottenere i noti valori dei coseni direttori . Ci si rifara' percio' ad una convenzione e cioe' che almeno uno dei 3 valori cercati sia uguale,in valore assoluto,ad 1.
Poiche' '' a '' e' legato a cosAd, '' b '' a cosBd, '' c '' a cosYd,e' sufficiente individuare uno dei 3 coseni direttori che sia diverso da zero ed assegnare alla coordinata omogenea cui e' legato il valore +-1,badando di apporre ad essa lo stesso segno del suo coseno direttore.

Sono quindi possibili 3 casi :

Per cosAd#0 : a=+-1;b=+-cosBd/cosAd;c=+-cosYd/cosAd (a,b,c con segno di cosAd)

Per cosBd#0 : b=+-1;a=+-cosAd/cosBd;c=+-cosYd/cosBd (a,b,c con segno di cosBd)

Per cosYd#0 : c=+-1;b=+-cosBd/cosYd;a=+-cosAd/cosYd (a,b,c con segno di cosYd)

CASO INVERSO : effettuata la complessiva rotazione su di un asse unico

con il sistema generale di cui al par. (2),scomporre questa rotazione

unica nelle sue componenti angolari A,B,Y di rotazione sugli assi

cartesiani,e cio' sia considerando il caso (1) che il (3).

Effettuato il calcolo con il sistema generale di cui al per. (2),si avranno a disposizione i 9 coseni direttori A1,B1,Y1 ecc. che sono stati derivati dalla conoscenza sia di : cosAd,cosBd,cosYd, che dell'angolo TETA'.

Con essi si potranno derivare gli angoli A,B,Y nel seguente modo :

Per il sistema (1),ossia con assi fissi :

Se $B3=0 \rightarrow A=0$ Se $A2=0 \rightarrow Y=0$

A = Arctg(B3/Y3) ; B = -Arcsin(A3) ; Y = Arctg(A2/A1)

se $Y3=0$ e $B3\neq 0 \rightarrow A=90°$ se $A1=0$ e $A2\neq 0 \rightarrow Y=90°$

Per il sistema (3),ossia con assi Mobili :

A = Arctg(-Y2/Y3) ; B = Arcsin(Y1) ; Y = Arctg(-B1/A1)

Relazioni esistenti tra il sistema di rotazione con assi fissi (1) e quello

con assi mobili (3),ossia come passare da un sistema all'altro,variando in

modo opportuno gli angoli A,B,Y.

$\operatorname{tg}\alpha(M) = \frac{\operatorname{tg}\alpha \cos Y}{\cos B} - \operatorname{tg}B \operatorname{sen}Y$; $\operatorname{sen}B(M) = \cos\alpha \operatorname{sen}B \cos Y + \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}Y$; $\operatorname{tg}Y(M) = \frac{\cos\alpha \operatorname{tg}Y}{\cos B} - \operatorname{sen}\alpha \operatorname{tg}B$

Avendo calcolati i 9 coseni direttori di un sistema,vuoi quello (1) che il (3),si puo' ottenere da alcuni di essi i valori angolari A,B,Y che si dovrebbero introdurre nell'altro sistema onde ottenere da quest'ultimo la medesima rotazione che si e' effettuata sul primo.

Disponendo di A1,B1,Y1,Y2,Y3 del sistema ad assi fissi :

A(M) = Arctg(-Y2/Y3) ; B(M) = Arcsin(Y1) ; Y(M) = Arctg(-B1/A1)

Disponendo di A1,A2,A3,B3,Y3 del sistema ad assi mobili :

A(F) = Arctg(B3/Y3) ; B(F) = -Arcsin(A3) ; Y(F) = Arctg(A2/A1)

$\operatorname{tg}\alpha(F) = \frac{\operatorname{tg}\alpha \cos Y}{\cos B} + \operatorname{tg}B \operatorname{sen}Y$; $\operatorname{sen}B(F) = \cos\alpha \operatorname{sen}B \cos Y - \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}Y$; $\operatorname{tg}Y(F) = \frac{\cos\alpha \operatorname{tg}Y}{\cos B} + \operatorname{sen}\alpha \operatorname{tg}B$

Sfruttando inoltre le simillitudini gia' viste a pag. 6,si puo' formulare quanto alla pagina precedente in modo unificato,ossia :

Usando A,B,Y del sistema di partenza,sia esso per rotazione su assi fissi (F) ,che su assi mobili (M),si ricaveranno gli A',B',Y' dell'altro sistema (tali che conducano ad una identica rotazione del corpo) nel seguente modo :

Si formino per brevita' le costanti : K1=sinAcosY ; K2=cosAsinY

K3=cosAcosB ; K4=cosBcosY

poi : Y2(F),B3(M) = K2sinB +- K1 ; dove - per Y2(F) e + per B3(M)

Y1(F),A3(M) = sinAsinY +- cosAsinBcosY ; dove + per Y1(F) e - per A3(M)

B1(F),A2(M) = K1sinB +- K2 ; dove - per B1(F) e + per A2(M)

Y3(F),Y3(M) = K3

A1(F),A1(M) = K4

Infine considerando che alla pag. precedente ci si serve di -Y2(F),-B1(F), e -A3(M),converra' invertire i corrispondenti segni delle pertinenti espressioni che sono state riportate sopra,ed ottenere che :

tgA' = (K1+-K2sinB)/K3 ; dove + per A'(F) e - per A'(M)

sinB' = cosAsinBcosY +- sinAsinY ; dove - per B'(F) e + per B'(M)

tgY' = (K2+-K1sinB)/K4 ; dove + per Y'(F) e - per Y'(M)

Nei casi reali,il range di A,B,Y va' naturalmente da 0 a 360 gradi,dunque si dovra' porre attenzione al quadrante nel quale casca il valore della tg. che si ricava sopra,e cio' anche perche' il calcolo che si dovra' effettuare sul sistema del quale si sono resi noti A',B',Y',riposa sulla conoscenza di : sinA',cosA',sinB',cosB',sinY',cosY' con i corretti segni che ne derivano dal loro quadrante di appartenenza.

Rinunciando invece ad un ragionamento sui quadranti e badando solo ai segni che correttamente vanno apposti ai sin e cos di cui sopra,si potra' ottenere quanto in oggetto calcolandoli direttamente senza passare (per il caso delle tangenti) per le funzioni trigonometriche inverse nel seguente modo :

costanti : K5=K1+-K2sinB ; K6=K2+-K1sinB ; dove + per F e - per M

R1=SQR(K3^2+K5^2) ; R2=SQR(K4^2+K6^2)

K7=cosAsinBcosY +- sinAsinY ; dove - per F e + per M

infine : sinA'= K5/R1 ; cosA'= K3/R1

sinB'= K7 ; cosB'= cos(Arcsin(K7))

sinY'= K6/R2 ; cosY'= K4/R2

In alternativa al sistema di calcolo per sinA',cosA',sinB',cosB',sinY',cosY' appena visto,si puo' formularne un'altro che non necessita dei radicali R1 ed R2,ma che comunque abbisogna sempre della conoscenza di 5 coseni direttori di 1 sistema onde passare all'altro,e cio' per questioni di segni da apporre correttamente ai sinA',cosA' ecc. di cui sopra.

Formulate per brevita' le costanti :

K1=sinAcosY ; K2=cosAsinY ; K3=cosAcosB ; K4=cosBcosY

K5=K1+-K2sinB ; K6=K2+-K1sinB ; dove + per (F) e - per (M)

K7=cosAsinBcosY+-sinAsinY ; dove - per (F) e + per (M)

Si potra' concludere che :

SinB'=K7 ; cosB'=cos(Arcsin(K7))

SinA'=K5/cosB' ; cosA'=K3/cosB'

SinY'=K6/cosB' ; cosY'=K4/cosB'

INDIVIDUAZIONE DEI QUADRANTI D'APPARTENENZA PER GLI ANGOLI A',B',Y'

Questo problema puo' non essere ricercato per alcune applicazioni,in tal caso valga quanto gia' detto alla pag. precedente,se fosse sufficiente la conoscenza di sinA',cosA',sinB',cosB',sinY',cosY',relativamente ai loro valori e segni.

Purtuttavia se fosse richiesta la conoscenza dei reali valori degli angoli A',B',Y',bisognerebbe operare dei tests sulle funzioni che conducono ai valori di tgA' e tgY' in particolare,e cio' perche' possono essere ricondotte a delle espressioni del tipo : tgA'=K5/K3 e tgY'= K6/K4 delle quali sono noti valori e segni delle costanti definite in K.

Ricapitolando quanto gia' detto alla pag. precedente,si formeranno le seguenti costanti :

K1=sinAcosY ; K2=cosAsinY ; K3=cosAcosB ; K4=cosBcosY

K5=K1+-K2sinB ; K6=K2+-K1sinB ; dove + per (F) e - per (M)

K7=cosAsinBcosY+-sinAsinY ; dove - per (F) e + per (M)

Quindi si potra' definire che :

```
Per K5,K3>0       ,range di A' : 0-90
Per K5>0 e K3<0   ,  ''    ''  '' : 90-180
Per K5,K3<0       ,  ''    ''  '' : 180-270
Per K5<0 e K3>0   ,  ''    ''  '' : 270-360
```

Ed analogamente :

```
Per K6,K4>0       ,range di Y' : 0-90
Per K6>0 e K4<0   ,  ''    ''  '' : 90-180
Per K6,K4<0       ,  ''    ''  '' : 180-270
Per K6<0 e K4>0   ,  ''    ''  '' : 270-360
```

Nella pratica di programmazione si potra' procedere in modo piu' sbrigativo testando i soprastanti coefficienti come segue :

```
A=arctg(K5/K3)
Se A'>0 e K3<0 allora A'=A'+180
Se A'<0 e K5<0 allora A'=A'+360
Se A'<0 e K3<0 allora A'=A'+180
Y'=arctg(K6/K4)
Se Y'>0 e K4<0 allora Y'=Y'+180
Se Y'<0 e K6<0 allora Y'=Y'+360
Se Y'<0 e K4<0 allora Y'=Y'+180

B'=arcsin(K7)
```

Seni e coseni degli angoli cosi' trovati permettono il corretto calcolo del sistema di rotazione voluto,tale che gli angoli A,B,Y ed A',B',Y' consentano nei due sistemi F ed M la medesima posizione del corpo dopo le rotazioni.